Παραγωγική ολοκλήρωση

$\downarrow$ 2 διαστ.

Green

$\downarrow$ 3 διαστ.

Stokes / Gauss

$\boxed{15/10/19}$

<u>Παρατήρηση</u>: Όλα απλουστεύονται για πραγματ. συν/σεις

$|H\rangle = \lambda_1 \cdot |f\rangle + \lambda_2 \cdot |g\rangle$ ή $|H\rangle = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 g(x)$

$\langle F|H\rangle = F(x) \cdot H(x) = \lambda_1 (F(x) \cdot f(x)) + \lambda_2 (F(x) \cdot g(x))$

$= \lambda_1 \cdot \langle F|f\rangle + \lambda_2 \cdot \langle F|g\rangle$

$$\langle F|H\rangle = \int_a^b F^*(x) H(x)\, dx = \int_a^b F^*(x) \cdot (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\, dx$$

$$= \int_a^b \lambda_1 F^*(x) f(x)\, dx + \int_a^b \lambda_2 F^*(x) g(x)\, dx$$

$$= \lambda_1 \cdot \int_a^b F^*(x) f(x)\, dx + \lambda_2 \cdot \int_a^b F^*(x) g(x)\, dx = \lambda_1 \cdot \langle F|f\rangle + \lambda_2 \cdot \langle F|g\rangle$$

Η ανισότητα του Schwartz

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $|a\rangle$ κ. $|b\rangle \in S$ ισχύει:

$$\|a\|\cdot\|b\| \geq |\langle b|a\rangle| \quad \text{ή} \quad \sqrt{\langle a|a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b|b\rangle} \geq |\langle b|a\rangle|$$

Παρατήρηση: Στον Ευκλείδιο χώρο η ιδιότητα αυτή είναι απόρροια από το γεγονός ότι το $|\cos\theta| \leq 1$. Βασική ιδιότητα για απόδ. άλλων προτάσεων. δηλ. S είναι Ευκλείδιος $\langle b|a\rangle = \|b\|\cdot\|a\|\cdot\cos\theta$

Απ.:

Αν $\langle b|a\rangle = 0$ τότε είναι προφανές

Αν $\langle b|a\rangle \neq 0$ τότε θέτουμε: $|c\rangle = |a\rangle - \lambda\cdot\langle b|a\rangle\cdot|b\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Γνωρίζ. από ορισμό εσωτερικού γινομένου ότι $\langle c|c\rangle \geq 0$

$$f(\lambda) = \langle c|c\rangle = \langle c|a\rangle - \lambda\cdot\langle b|a\rangle\cdot\langle c|b\rangle =$$

$$= \lambda^2\langle b|a\rangle^2\langle b|b\rangle - 2\lambda\cdot|\langle b|a\rangle|^2 + \langle a|a\rangle \geq 0$$

Πρέπει η $\Delta \leq 0 \Rightarrow 4|\langle b|a\rangle|^4 - 4|\langle b|a\rangle|^2\cdot\langle b|b\rangle\langle a|a\rangle \leq 0$

$$\Rightarrow \langle b|b\rangle\cdot\langle a|a\rangle \geq |\langle b|a\rangle|^2$$

$$\text{ή} \quad \|b\|\cdot\|a\| \geq |\langle b|a\rangle|$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Τα μη-μηδενικά διανύσματα $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ καλούνται γραμμ. ανεξάρτητα αν $\lambda_1\cdot|x_1\rangle + \lambda_2\cdot|x_2\rangle + \ldots + \lambda_n\cdot|x_n\rangle = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Σε αντίθετη περίπτωση λέγονται γραμμ. εξαρτημένα κ. $\exists \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n \neq 0$

Π.χ. • Τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

Έστω $\lambda_1\cdot\bar{i} + \lambda_2\cdot\bar{j} + \lambda_3\cdot\bar{k} = 0$. Τότε:

$$\lambda_1 \cdot \underset{1}{\langle \hat{i} | \hat{i} \rangle} + \lambda_2 \cdot \underset{0}{\langle \hat{i} | \hat{j} \rangle} + \lambda_3 \cdot \underset{0}{\langle \hat{i} | \hat{k} \rangle} = \lambda_1 = 0$$

Όμοια κ. για τα $\lambda_2, \lambda_3 = 0$

δηλ. $\lambda_1 \cdot \underset{0}{\langle \hat{j} | \hat{i} \rangle} + \lambda_2 \cdot \underset{1}{\langle \hat{j} | \hat{j} \rangle} + \lambda_3 \cdot \underset{0}{\langle \hat{j} | \hat{k} \rangle} = \lambda_2 = 0$

- Τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3, x^4$ κλπ.

Κάνουμε την εξής αντιστοιχία:

$|x_1\rangle = 1$, $|x_2\rangle = x$, $|x_3\rangle = x^2$, $|x_4\rangle = x^3$

Τα $|x_i\rangle$, $i = 1, 2, 3, 4$ είναι γραμμ. ανεξ.

Έστω ότι $a_1 \cdot |x_1\rangle + a_2 \cdot |x_2\rangle + a_3 \cdot |x_3\rangle + a_4 \cdot |x_4\rangle = 0$

$\Rightarrow a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Τότε από άλγεβρα είναι γνωστό ότι τα $a_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένας δ.χ. λέγεται N-διάστατος ($N < \infty$) αν υπάρχουν N γραμμ. ανεξάρτητα διαν/τα αλλά οποιαδήποτε $N+1$ διάν/τα είναι γραμμ. εξαρτημένα

Παρατήρηση: Αν για κάθε δοσμένο σύστημα γραμμ. ανεξ. διαν/των $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ μπορώ να βρω ένα ακόμα διάν/μα γραμμ. ανεξάρτητο, $\forall N$, τότε ο χώρος είναι απείρων διαστάσεων

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένα σύνολο n-γραμμ. ανεξ. διαν/των $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ αποτελεί βάση του δ.χ. S, αν κάθε $|x\rangle \in S$ μπορεί να γραφεί ως γραμμ. συνδυασμό των $|x_i\rangle$. Δηλ.:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot |x_i\rangle$$

Τα a_i είναι οι συνιστώσες του $|x\rangle$ ως προς τη βάση $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ κ. είναι μοναδικές.

Πχ. • $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$

Δηλ. το $\bar{r} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\bar{k}$

• Θεωρούμε τα $\{1, x, x^2, x^3\}$ είναι μια βάση στο χώρο των πολυωνύμων βαθμού ≤ 3.

Κάθε πολυώνυμο βαθμού ≤ 3 γράφεται ως:

$$P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν n-διανύσματα ενός n-διάστατου δ.χ. S είναι γραμμ. ανεξ. τότε αποτελούν βάση του δ.χ. S

Παρατήρηση: Η βάση λέγεται ορθοκανονική αν

$$\langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Διαδικασία Gram-Schmidt

$\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ ορθοκανονικών διανυσμάτων, ξεκινώντας από ένα σύστημα $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{\Lambda}$, $\Lambda \geq N$

1) Κατασκευάζω τα $\langle x_i | x_j \rangle$, $i,j = 1,2,\dots,N$ κ' αφαιρώ τα διανύσματα $|x_i\rangle$ τ.ω. $\langle x_i | x_i \rangle = 0$

2) $|x_1\rangle$, κατασκευάζουμε το $|e_1\rangle = \dfrac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1 | x_1 \rangle}} e^{i\phi}$

για αυθαίρετη φάση φ, επιλέγουμε το $\phi = 0$

τότε $\langle e_1 | e_1 \rangle = 1$

3) Τώρα $|e_2\rangle = N_2 \cdot (|x_2\rangle + b_{21}|e_1\rangle)$ να προσδιορίσω τα N_1, b_{21} από τα εσωτερικά γινόμενα,

$\langle e_1 | e_2 \rangle = 0$ κ' $\langle e_2 | e_2 \rangle = 1$

Δηλ. $\langle e_1 | e_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle e_1 | x_2 \rangle + b_{21} \cdot \langle e_1 | e_1 \rangle = 0$

$$\Rightarrow b_{21} = -\langle e_1 | x_2 \rangle = -\frac{\langle x_1 | x_2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1 | x_1 \rangle}}$$

Επίσης: $\langle e_2|e_2\rangle = 1 \overset{\text{πρ.}}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow |N_2|^2\left(\langle x_2|x_2\rangle + \beta_{21}\langle x_2|e_1\rangle + \beta_{21}^*\langle e_1|x_2\rangle + |\beta_{21}|^2\underbrace{\langle e_1|e_1\rangle}_{=1}\right)$$

από εδώ υπολογίζω το N_2

$$|e_1\rangle = \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}}$$

$$|e_2\rangle = N_2\left(|x_2\rangle + \beta_{21}\cdot|e_1\rangle\right)$$

$$\langle e_1|e_2\rangle = 0$$

$$\langle e_2|e_2\rangle = 1$$

$$|e_3\rangle = N_3\cdot\left(|x_3\rangle + \beta_{32}\cdot|e_2\rangle + \beta_{31}\cdot|e_1\rangle\right)$$

$$\beta_{3i} = -\langle e_i|x_3\rangle, \quad i=1,2$$

κ: $$N_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle x_2|x_2\rangle - |\beta_{32}|^2 - |\beta_{31}|^2}}$$

<u>Τελικά</u>: για το $k+1$ ορθοκανονικό διάνυσμα αν έχουμε k ορθοκανονικά διανύσματα:

$$|e_{k+1}\rangle = N_{k+1}\left(|x_{k+1}\rangle + \sum_{i=1}^{k}\beta_{k+1,i}\,|e_i\rangle\right)$$

$$\beta_{k+1,i} = -\langle e_i|x_{k+1}\rangle, \quad i=1,2,\dots,k$$

$$N_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{\langle x_{k+1}|x_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^{k}|\beta_{k+1,i}|^2}}$$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Κατασκευάζουμε τα πολ/μα Legendre $P_n(x) \in [-1,1]$

Βάση μονονύμων $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i=1,2,3,\dots,N+1$

<u>Απ.</u>:

$|x_1\rangle = 1$ Από G.-S: $|P_0\rangle = x^0 = 1 = P_0(x)$

$|x_2\rangle = x$ $|P_1\rangle = x$

$|x_3\rangle = x^2$ $|P_1\rangle = N_2\left(|x_2\rangle + \beta_{21}\cdot|P_0\rangle\right)$

$|x_4\rangle = x^3$ $= N_2\left(x + \beta_{21}\cdot 1\right)$

$\vdots$

$$\langle P_0|P_1\rangle = 0 \Rightarrow N_2\left(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle 1|x\rangle}} + \beta_{21}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_{21} = 0$$

Παρατήρηση:
$$\langle x_m | x_n \rangle = \int_{-1}^{1} x^{m-1} x^{n-1}\, dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n-2}\, dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{m+n-1} , & m+n \text{ άρτιος} \geq 2 \\ 0 , & m+n \text{ περιττός} \geq 2 \end{cases}$$

$$\langle x_2 | x_2 \rangle = \langle P_1 | P_1 \rangle = |N_2|^2 \cdot \Big(\langle x_2 | x_2 \rangle + b_4 \langle x_2 | e_1 \rangle + b_{21}^* \langle e_1 | x_2 \rangle + \cancel{|b_{21}|^2} \cdot \underbrace{\langle e_1 | e_1 \rangle}_{1} \Big)$$

$= \frac{2}{3}$ από τον παίνω ορισμό εσωτερικού γινομένου

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = |N_2|^2 \cdot \langle x | x \rangle \Rightarrow N_2 = 1$$

Δηλ. $|P_1\rangle = x = |x_2\rangle = P_1(x)$

$$|P_2\rangle = P_2(x) = N_3\big(|x_3\rangle + b_2 \underbrace{|P_1\rangle}_{|x_2\rangle} + b_1 |P_0\rangle \big)$$

Παρατήρηση: $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = \frac{2}{m+n+1} \delta_{mn}$

(ορισμός)

ή $\dfrac{2}{2n+1} \delta_{mn}$

$$\int_{-1}^{1} P_0(x) \cdot P_1(x) dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_0 \cdot P_0\, dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} P_1 \cdot P_1\, dx = \dots = 2/3$$

Άρα στην περίπτωση αυτή τα πολ/μα $P_n(x)$ δεν είναι ορθοκανονικά, αλλά ισχύει ο ορισμός αυτός

Συνεπώς:

$$\langle P_2 | P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} P_2^2(x)\,dx = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{N = \frac{3}{2}}$$

$$\langle P_2 | P_1 \rangle = 0 \Rightarrow N_3 \big(\underbrace{\langle x^2 | x \rangle}_{0} + \beta_2 \underbrace{\langle x | x \rangle}_{2/3} + \beta_1 \underbrace{\langle x | 1 \rangle}_{0} \big) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2 = 0$$

$$\langle P_2 | P_0 \rangle = N_3 \cdot \big(\underbrace{\langle x^2 | 1 \rangle}_{0} + \beta_1 \cdot \underbrace{\langle 1 | 1 \rangle}_{1} \big) \Rightarrow 0 = \beta_1$$

??